CONCOURS D'ENTRÉE À L'ÉCOLE des INGÉNIEURS de la VILLE de PARIS
ouvert le 22 avril 1987

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES (Durée 2 h - coefficient 2)

1ère partie :

I-) On considère la série entière $\sum (-1)^n u_n x^n$ où $u_n = \frac{2}{(4n+1)(4n+3)}$ $(n \in \mathbb{N})$

Pour tout x appartenant au domaine de convergence de cette série entière, on note $S(x)$ la somme de la série, $S_n(x)$ la somme partielle de rang n et $R_n(x)$ le reste d'ordre n, à savoir :

$$S(x) = \sum_{0}^{\infty} (-1)^p u_p x^p \; ; \; S_n(x) = \sum_{0}^{n} (-1)^p u_p x^p \; ; \; R_n(x) = \sum_{n+1}^{\infty} (-1)^p u_p x^p .$$

Montrer que le rayon de convergence de cette série est égal à 1.

Etudier la convergence de la série entière en 1 et - 1.

II-)

a) Quel est le signe de $R_n(1)$. Donner une majoration simple de $|R_n(1)|$.

b) Donner les valeurs approchées à 10^{-6} près de $S_3(1)$ et de $S_4(1)$. En déduire un encadrement de $S(1)$.

III-)

a) Soit $A(p,a) = (4p+1)(4p+3) - 16(p+a)^2$ où p est un nombre entier strictement positif et a un réel donné. Quel est le signe de cette expression pour les valeurs $a = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$

b) Comparer les nombre réels $\frac{1}{x^2}$, $\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2}$, $\int_{x}^{x+1} \frac{dt}{t^2}$ pour $x \geq 1$.

c) Déduire du a) et du b) un encadrement de $R_n(-1)$ du type

$$\frac{A}{n+a_1} \leq R_n(-1) \leq \frac{A}{n+a_2}$$ où (A, a_1, a_2) est un élément de $\mathbb{R}^3$ à préciser.

d) Donner un encadrement de $S(-1)$ en appliquant le résultat précédent à $n = 3$, les valeurs approchées seront calculées à 10^{-6} près.

e) Donner la valeur exacte de $S(-1)$. (On pourra sans démonstration utiliser le résultat $\frac{\pi}{4} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$).

IV-) On se propose dans cette question de calculer $S(1)$.

a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{2}{(4x+1)(4x+3)}$.

b) Justifier soigneusement la formule : $S(1) = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^4} dt$. (On utilisera $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt \quad \forall k \in \mathbb{N}$).

c) Donner la valeur exacte de $S(1)$.

Tournez la page S.V.P.

2ème partie :

I-) On considère la suite $\left(I_n\right)_{n\in N}$ définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2n\theta)}{\cos\theta}\,d\theta$

a) Calculer I_0. Vérifier que $I_0 = \sqrt{2}\,S(1)$, où S est la fonction définie à la 1ère partie.

b) Calculer $I_{n+1} + I_n$. Donner la valeur de cette expression suivant le reste de la division de n par 4.

II-)

a) Calculer $I_{2n+2} - I_{2n}$. En déduire l'expression générale de I_{2n}.

b) Donner les expressions exactes et approchées à 10^{-6} près de I_0, I_2, I_4, I_6.

c) Comparer I_{2n} à $R_{n-1}(1)$. (voir 1ère partie). En déduire que $I_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Quel est le signe de I_{2n}.

3ème partie :

On considère la fonction $\theta \longmapsto f(\theta)$ définie sur R, de période $\frac{\pi}{2}$ et prenant la valeur $\frac{1}{\cos\theta}$ quand $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

On appelle a_n et b_n les coefficients de Fourier de rang n associés à la fonction f. On désigne par $f_n(\theta)$ la fonction définie sur R par

$$\theta \longmapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=n} (a_p \cos p\theta + b_p \sin p\theta)$$

On rappelle que $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta$ et $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta$.

I-) Expliquer pourquoi : $\forall \theta \in R \quad f_n(\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\theta)$

II-) Construire la courbe définie par l'équation polaire $\rho = f(\theta)$. $(\theta \in R)$

III-)

a) Quelle est la valeur de b_n quand n parcourt N^* ?

b) Quelle est la valeur exacte de a_0 ?

c) Montrer que

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\theta)\left[\cos n\theta + \cos n\left(\theta+\tfrac{\pi}{2}\right) + \cos n(\theta+\pi) + \cos n\left(\theta+\tfrac{3\pi}{2}\right)\right]d\theta.$$

En déduire que a_n est nul si n n'est pas multiple de 4 et que $a_{4n} = \frac{8}{\pi} I_{2n}$

d) Donner les valeurs approchées à 10^{-6} près de a_0, a_4, a_8, a_{12}.

IV-)

a) Donner sous la forme d'un tableau les valeurs approchées à 10^{-6} près de

$f\left(\frac{q\pi}{20}\right), f_{12}\left(\frac{q\pi}{20}\right), f\left(\frac{q\pi}{20}\right) - f_{12}\left(\frac{q\pi}{20}\right)$ avec q prenant successivement les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5.

b) En n'utilisant que les valeurs précédentes, construire la courbe d'équation polaire $\rho = f_{12}(\theta) \quad (\theta \in R)$

V-)

a) Vérifier que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f_{4n}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{p=n+1}^{\infty} (-1)^p I_{2p}$

b) Etablir la formule $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f_{4n}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty} u_{n+1+2p}$

c) Quel est le signe de $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f_{4n}\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

d) Vérifier que $\left|f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f_{4n}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \frac{4\sqrt{2}}{\pi} R_{n-1}(-1) \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi(4n-2+\sqrt{3})}$

e) Vérifier que $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad \left|f(\theta) - f_{4n}(\theta)\right| \leqslant \left|f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f_{4n}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

• • •